# Examen HAVO

# 2021

tijdvak 1
woensdag 26 mei
13.30 - 16.30 uur

## wiskunde A

Dit examen bestaat uit 24 vragen.
Voor dit examen zijn maximaal 81 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

FORMULEBLAD

**Vuistregels voor de grootte van het verschil van twee groepen**

2×2 kruistabel $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, met $phi = \dfrac{ad - bc}{\sqrt{(a+b)(a+c)(b+d)(c+d)}}$

- als $phi < -0{,}4$ of $phi > 0{,}4$, dan zeggen we “het verschil is groot”,
- als $-0{,}4 \le phi < -0{,}2$ of $0{,}2 < phi \le 0{,}4$, dan zeggen we “het verschil is middelmatig”,
- als $-0{,}2 \le phi \le 0{,}2$, dan zeggen we “het verschil is gering”.

Maximaal verschil in cumulatief percentage ($\max V_{cp}$) (met voor beide groepen een steekproefomvang $n > 100$)

- als $\max V_{cp} > 40$, dan zeggen we “het verschil is groot”,
- als $20 < \max V_{cp} \le 40$, dan zeggen we “het verschil is middelmatig”,
- als $\max V_{cp} \le 20$, dan zeggen we “het verschil is gering”.

Effectgrootte $E = \dfrac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\frac{1}{2}(S_1 + S_2)}$, met $\overline{X}_1$ en $\overline{X}_2$ de steekproefgemiddelden ($\overline{X}_1 \ge \overline{X}_2$), $S_1$ en $S_2$ de steekproefstandaardafwijkingen

- als $E > 0{,}8$, dan zeggen we “het verschil is groot”,
- als $0{,}4 < E \le 0{,}8$, dan zeggen we “het verschil is middelmatig”,
- als $E \le 0{,}4$, dan zeggen we “het verschil is gering”.

Twee boxplots vergelijken

- als de boxen[1)] elkaar niet overlappen, dan zeggen we “het verschil is groot”,
- als de boxen elkaar wel overlappen en een mediaan van een boxplot buiten de box van de andere boxplot ligt, dan zeggen we “het verschil is middelmatig”,
- in alle andere gevallen zeggen we “het verschil is gering”.

noot 1 De ‘box’ is het interval vanaf het eerste kwartiel tot en met het derde kwartiel.

## Betrouwbaarheidsintervallen

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de populatieproportie is

$p \pm 2 \cdot \sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}$, met $p$ de steekproefproportie en $n$ de steekproefomvang.

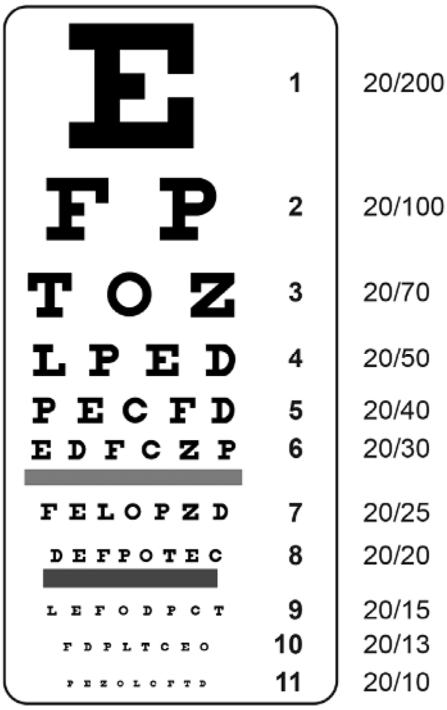
Het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het populatiegemiddelde is

$\overline{X} \pm 2 \cdot \dfrac{S}{\sqrt{n}}$, met $\overline{X}$ het steekproefgemiddelde, $n$ de steekproefomvang en $S$ de steekproefstandaardafwijking.

## Visus

Om te bepalen hoe goed iemands ogen functioneren, wordt vaak gebruikgemaakt van de Snellenkaart. De letters op deze kaart moeten vanaf een afstand van 20 feet (ongeveer 6 meter) worden gelezen.
Zie de figuur.

**figuur**




De **visus** is een maat voor de gezichtsscherpte. Deze maat kan met behulp van de Snellenkaart worden uitgedrukt in een score $S$. Iemand met normaal functionerende ogen kan de letters op regel 8 nog wel lezen, maar de letters op regel 9 niet meer. Bij normaal functionerende ogen hoort een score $S = \frac{20}{20} = 1$. Als een persoon nog kleinere letters kan lezen, dan is de score $S$ groter dan 1. Bij de onderste regel 11 hoort bijvoorbeeld de score $S = \frac{20}{10} = 2$.

Iemand met $S = 0{,}5$ moet alles van tweemaal zo dichtbij bekijken om hetzelfde op de Snellenkaart te kunnen zien als iemand met $S = 1$.
Iemand met $S = 0{,}1$ moet tienmaal zo dichtbij staan, enzovoort.

Klaas en Lidy laten hun visus meten. Klaas kan regel 2 nog wel lezen, maar regel 3 niet meer. Lidy kan regel 7 nog wel lezen, maar regel 8 niet meer.

3p **1** Bereken hoeveel keer zo dicht Klaas bij de Snellenkaart moet staan als Lidy om hetzelfde te kunnen lezen als Lidy.

Er zijn meerdere maten voor de gezichtsscherpte. Voorbeelden hiervan zijn de logMAR-schaal[1)] en de ETDRS-letterscore[2)].

Het verband tussen de score $S$ volgens de Snellenkaart en de score $M$ op de logMAR-schaal wordt gegeven door formule 1. Voor het verband tussen de score $S$ en de ETDRS-letterscore $E$ geldt formule 2:

$$S = 10^{-M} \qquad \text{(formule 1)}$$

$$S = 10^{\frac{E-85}{50}} \qquad \text{(formule 2)}$$

De Wereldgezondheidsorganisatie noemt mensen met een score $S$ tussen 0,05 en 0,3 slechtziend.

3p **2** Welke scores van $M$ op de logMAR-schaal komen overeen met de scores $S = 0{,}05$ en $S = 0{,}3$? Geef je antwoorden in één decimaal.

Het Centraal Bureau Rijvaardigheidsbewijzen (CBR) stelt als keuringseis dat $S$ minimaal 0,5 moet zijn. Janne heeft een ETDRS-letterscore van 75.

3p **3** Wordt Janne goedgekeurd door het CBR? Licht je antwoord toe met een berekening.

Aan de hand van formule 1 en formule 2 kan beredeneerd worden dat als $M$ groter wordt, $E$ kleiner zal worden.

3p **4** Geef deze redenering, zonder gebruik te maken van getallenvoorbeelden.

Door de twee formules te combineren, kan het volgende verband tussen $M$ en $E$ worden afgeleid:

$$-M = \frac{E - 85}{50}$$

3p **5** Leid hieruit een formule af waarbij $E$ wordt uitgedrukt in $M$.

noot 1 logMAR = Logarithm of the Minimum Angle of Resolution
noot 2 ETDRS = Early Treatment Diabetic Retinopathy Study

## Klarinet

Een klarinet is een houten blaasinstrument. Alle mogelijke tonen die op het instrument kunnen worden gespeeld, worden samen het bereik genoemd. Het bereik van een klarinet is bijna vier octaven. Een octaaf bestaat uit 12 opeenvolgende toonafstanden. Zie de tabel.

Elke voorafgaande of opeenvolgende octaaf heeft dezelfde namen voor de tonen in dat octaaf.

De frequentie van een toon wordt gegeven in hertz (Hz), dit is het aantal trillingen per seconde. Bij een hogere toon hoort een hogere frequentie. Als je eenzelfde toon één octaaf hoger speelt, wordt de frequentie twee keer zo groot. Er bestaat een exponentieel verband tussen de frequenties en de tonen in de tabel: van elke volgende toon neemt de frequentie met een vast percentage toe. In de tabel zie je van enkele tonen de frequenties.

**tabel Voorbeeld van een octaaf**

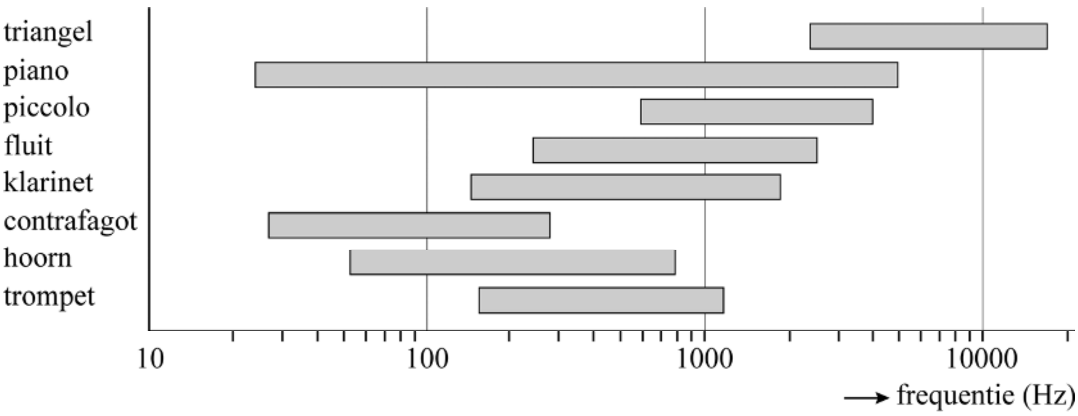
| toon | A | Bes | B | C | Des | D | Es | E | F | Ges | G | As | A |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| frequentie (Hz) | 440 | | | | | 587 | | | | | | | 880 |

In de tabel is de frequentie van de D-toon afgerond op hele Hz.

4p **6** Bereken op basis van de frequenties van de A-tonen uit de tabel de frequentie van de D-toon. Geef je antwoord in één decimaal.

In de figuur wordt op een logaritmische schaalverdeling het bereik van verschillende instrumenten aangegeven.

**figuur**



De laagste toon die een klarinet kan laten horen is een D. De hoogste toon is een A.

3p **7** Bereken aan de hand van bovenstaande gegevens, de tabel en de figuur de laagste en de hoogste frequentie die een klarinet kan bereiken. Geef je antwoorden in een geheel aantal Hz.

Een klarinettist moet altijd eerst een korte tijd inspelen om de klarinet op een vaste temperatuur van 31 °C te brengen. Als de klarinet koud is, klinken de tonen namelijk lager dan als de klarinet warm is. Dit komt omdat de snelheid van het geluid afhankelijk is van de temperatuur. Dit verband wordt gegeven door de formule:

$$v = 20\sqrt{273 + T}$$

Hierin is $v$ de snelheid van het geluid (in m/s) en $T$ de temperatuur (in °C).

Met de formule kun je bijvoorbeeld berekenen dat bij een temperatuur van 20 °C de snelheid van het geluid ongeveer 342 m/s is. Bij een temperatuur van 31 °C is deze snelheid ongeveer 349 m/s.

4p **8** Bereken hoeveel graden de temperatuur moet toenemen om de snelheid van het geluid te laten stijgen van 339 m/s naar 349 m/s. Geef je antwoord in een geheel aantal graden.

Een toon van de klarinet is te horen als er lucht in de klarinetbuis in trilling gebracht wordt. Door tijdens het spelen gaatjes in de klarinetbuis open of dicht te doen, verandert de lengte $L$ van het gedeelte van de klarinetbuis waarin de lucht trilt. De frequentie van een toon die op een klarinet gespeeld wordt, kun je berekenen met de formule:

$$f = \frac{v}{4L}$$

Hierin is $f$ de frequentie van de toon (in Hz), $v$ de snelheid van het geluid in de klarinet (in m/s) en $L$ de lengte van het gedeelte van de klarinetbuis waarin de lucht trilt (in m).

Els speelt op haar klarinet met de eerder genoemde temperatuur van 31 °C een toon die klinkt met een frequentie van precies 440 Hz. Deze toon had bij het begin van het inspelen op de klarinet met een temperatuur van 20 °C een andere frequentie dan nu de klarinet een temperatuur van 31 °C heeft.

3p **9** Bereken deze frequentie. Geef je antwoord in een geheel aantal Hz.

## De voorsteekpas[1]

In de zomermaanden worden pretparken druk bezocht. De wachttijden voor de attracties kunnen dan sterk oplopen. De wachttijd voor een attractie kan berekend worden met de formule:

$$W = \frac{r \cdot S}{2(1-r)}$$

Hierin is $W$ de gemiddelde wachttijd van een willekeurige bezoeker in minuten en $r$ de bezettingsgraad van de attractie ($0 < r < 1$).
Als voor de bezettingsgraad bijvoorbeeld geldt dat $r = 0{,}85$, betekent dit dat gemiddeld 85% van de plaatsen in de attractie bezet is.
$S$ is de bedieningstijd per bezoeker in seconden.
Als bijvoorbeeld een attractie elke 10 minuten 100 bezoekers kan bedienen, geldt:
$S = 6 \; (= \frac{600 \text{ seconden}}{100 \text{ bezoekers}})$.

In Walibi Belgium is de achtbaan Vampire een populaire attractie, die in de zomermaanden een bezettingsgraad van 98% heeft. De Vampire kan iedere vier minuten 80 bezoekers bedienen.

3p **10** Bereken hoeveel minuten de gemiddelde wachttijd van een bezoeker voor de Vampire in de zomermaanden is.

In de zomer van 2013 introduceerde Walibi Belgium een zogenoemde voorsteekpas. Met deze pas kan een bezoeker voorrang krijgen bij de attracties. Daardoor zal de wachttijd voor een bezoeker zonder deze pas langer worden.

Er zijn nu twee formules voor de wachttijd voor een attractie, namelijk een formule voor de gemiddelde wachttijd $W_p$ in minuten van een bezoeker met de voorsteekpas en een formule voor de gemiddelde wachttijd $W_z$ in minuten van een bezoeker zonder voorsteekpas:

$$W_p = \frac{r \cdot S}{2(1-a \cdot r)} \quad \text{en} \quad W_z = \frac{r \cdot S}{2(1-r)(1-a \cdot r)}$$

Hierin is $a$ het gedeelte van de bezoekers met een voorsteekpas ($0 < a < 1$).

noot 1 ‘Voorsteken’ is een Vlaams woord voor ‘inhalen, voordringen’.

Een andere bekende attractie van Walibi Belgium is de Cobra. Deze attractie heeft een bezettingsgraad van 95% (dus $r = 0{,}95$) en een bedieningstijd van 6 seconden per bezoeker (dus $S = 6$).

Op 6 juli 2013 kocht 10% van de bezoekers een voorsteekpas, dus $a = 0{,}10$.

4p **11** Bereken voor deze dag het verschil in wachttijd bij de Cobra tussen bezoekers zonder voorsteekpas en bezoekers met voorsteekpas. Geef je antwoord in gehele minuten.

De wachttijd van de bezoekers zonder voorsteekpas wordt groter als meer bezoekers een voorsteekpas kopen.
De directie van Walibi Belgium wil dat de wachttijd van bezoekers zonder voorsteekpas bij de Cobra maximaal 80 minuten is.

4p **12** Bereken hoeveel procent van de bezoekers dan maximaal een voorsteekpas mag hebben. Geef je antwoord in één decimaal.

Voor de Cobra kan de formule van de wachttijd voor bezoekers zonder voorsteekpas worden herleid tot:

$$W_z = \frac{5{,}7}{0{,}10 - \ldots \cdot a}$$

3p **13** Geef deze herleiding. Rond het getal dat op de puntjes moet staan niet af.

## Nibud Scholierenonderzoek

Het Nibud Scholierenonderzoek brengt het financiële gedrag van scholieren in het voortgezet onderwijs in kaart.
De populatie van dit onderzoek bestaat uit alle vmbo-, havo- en vwo-scholieren in de leeftijd van 12 tot en met 18 jaar. Van een aselecte steekproef van 3260 scholieren uit de populatie zijn gegevens beschikbaar gekomen via online vragenlijsten. We gaan ervan uit dat deze steekproef representatief is.

1530 scholieren in de steekproef hebben een bijbaantje.

3p **14** Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de populatieproportie scholieren met een bijbaantje. Geef de getallen in je antwoord in twee decimalen.

In het rapport staat een tabel met informatie over het gemiddeld aantal uren per week dat een scholier met een bijbaantje werkt (zie tabel 1).

**tabel 1 Bijbaan: gemiddeld aantal uren per week**

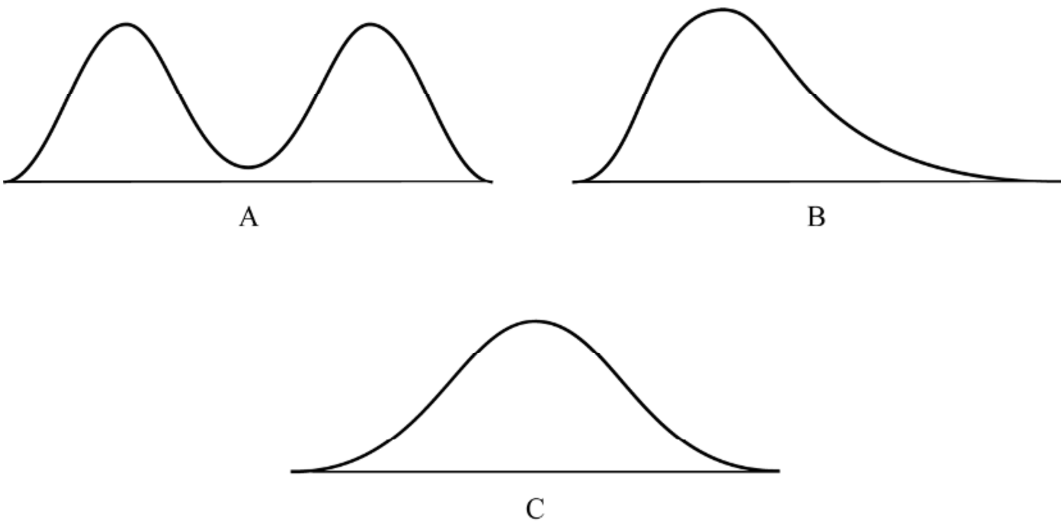
| onderwijsniveau en klas | bijbaan (uren per week) |
|---|---|
| vmbo bovenbouw (klas 3 en 4) | 9 |
| havo / vwo (klas 3) | 6 |
| havo bovenbouw (klas 4 en 5) | 8 |
| vwo bovenbouw (klas 4, 5 en 6) | 6 |

Als je met behulp van het formuleblad een uitspraak wilt doen over het verschil tussen havo bovenbouwscholieren met een bijbaantje en vwo bovenbouwscholieren met een bijbaantje in het aantal uren dat zij werken, dan heb je meer informatie of misschien wel heel andere informatie nodig dan die in tabel 1 staat.

4p **15** Beschrijf twee manieren om met behulp van het formuleblad een uitspraak te doen over dit verschil tussen deze twee groepen, en geef voor beide manieren aan welke informatie je dan (extra) nodig hebt.

In de steekproef bedroeg het gemiddelde inkomen van een scholier met een bijbaantje 112 euro per maand. De mediaan was 65 euro. In de figuur zie je drie frequentieverdelingen afgebeeld waarvan er één de frequentieverdeling van het inkomen per maand van een scholier met een bijbaantje in de steekproef weergeeft.

**figuur**




2p **16** Welke van de drie frequentieverdelingen is dat? Licht je antwoord toe.

Het Nibud wil het inkomen van scholieren met een bijbaantje ook per onderwijsniveau in kaart brengen. Dat hebben ze gedaan door tabel 2 in hun onderzoeksrapport te zetten.

**tabel 2 Bijbaan: inkomen (in euro) per maand van 15- en 16-jarigen**

| onderwijsniveau en klas | gemiddelde | mediaan |
|---|---|---|
| vmbo bovenbouw (klas 3 en 4) | 149 | 107 |
| havo / vwo (klas 3) | 93 | 65 |
| havo bovenbouw (klas 4 en 5) | 181 | 142 |
| vwo bovenbouw (klas 4, 5 en 6) | 130 | 101 |

Deze tabel is gebaseerd op scholieren in de steekproef die 15 of 16 jaar zijn.

2p **17** Leg uit waarom men niet heeft gekozen voor scholieren in de steekproef die 17 of 18 jaar zijn.

Voor het laatste onderdeel van deze opgave kijken we niet naar het inkomen van scholieren, maar naar een aspect van de uitgaven van scholieren. Dit aspect betreft de vraag hoe vaak scholieren spijt hebben na het doen van een aankoop. Van 1200 aselect gekozen respondenten (600 jongens en 600 meisjes) is bekend hoe vaak zij spijt hebben na het doen van een aankoop. De resultaten zijn weergegeven in een relatieve frequentietabel, zie tabel 3.

**tabel 3 Spijt na het doen van een aankoop**

| | **jongens** | **meisjes** | **totaal** |
|---|---|---|---|
| nooit / zelden | 16% | 8% | 12% |
| meestal niet | 65% | 61% | 63% |
| meestal wel | 19% | 29% | 24% |
| vaak / altijd | 0% | 2% | 1% |

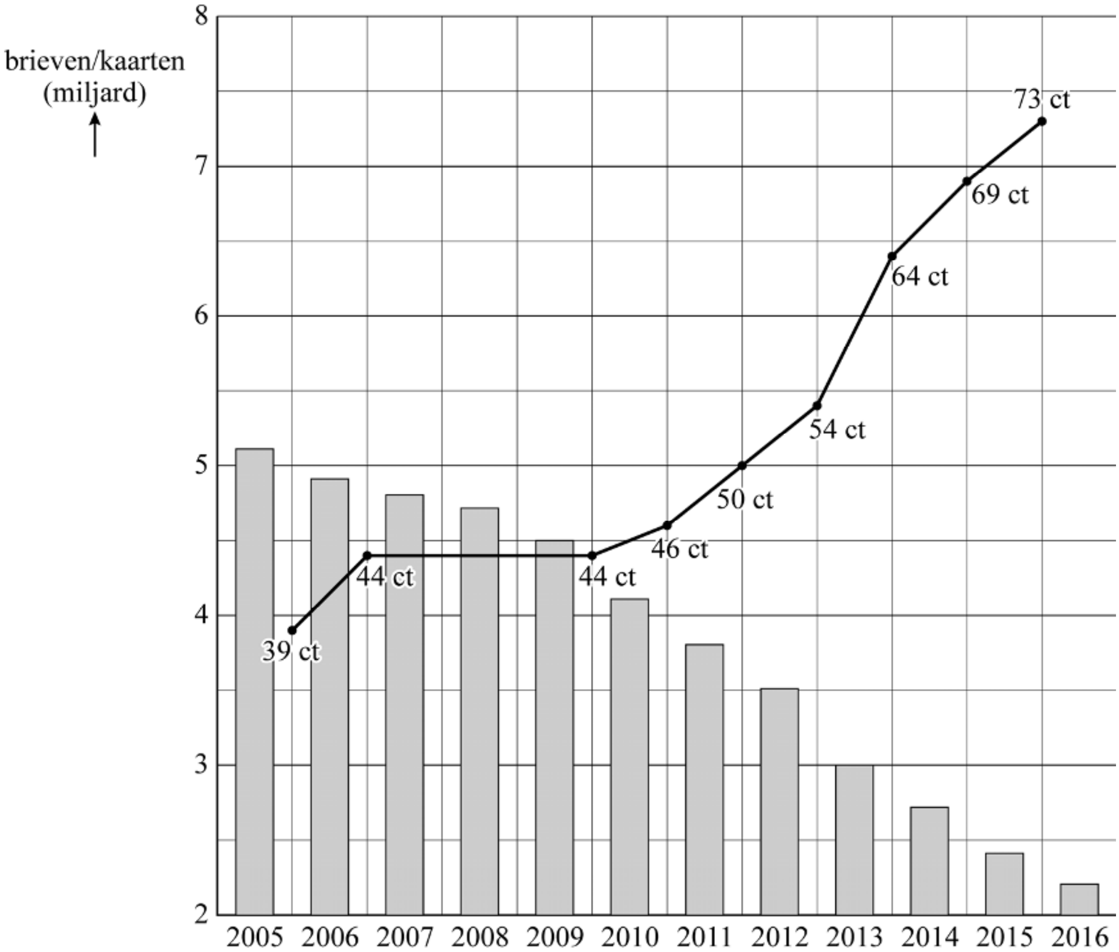
5p **18** Onderzoek met behulp van het formuleblad of het verschil tussen jongens en meisjes in hoe vaak zij spijt hebben na het doen van een aankoop gering, middelmatig of groot is.

**Ga verder op de volgende pagina.**

## Postzegels

Mensen sturen steeds minder brieven en kaarten. Postzegels zijn in Nederland de afgelopen jaren flink duurder geworden. Elk jaar op 1 januari wordt de prijs zo nodig aangepast.
In de figuur zie je de postzegelprijs (in centen) en het aantal brieven/kaarten (in miljarden) dat bezorgd werd in de jaren 2005-2016.

**figuur**




Je kunt in de figuur bijvoorbeeld aflezen dat op 1 januari 2007 de postzegelprijs 44 cent was en dat er in het jaar 2007 4,8 miljard brieven/kaarten werden bezorgd.

Op 1 januari 2010 kostte een postzegel 44 cent. Op 1 januari 2014 was de prijs gestegen tot 64 cent. Veronderstel dat in de periode 2010-2014 de postzegelprijs exponentieel groeide.

4p **19** Bereken met de bovengenoemde gegevens uit 2010 en 2014 het jaarlijkse groeipercentage van de postzegelprijs. Geef je antwoord in één decimaal.

In de periode 2010-2016 nam het aantal brieven/kaarten dat jaarlijks werd bezorgd bij benadering lineair af. Er werd in 2016 voorspeld dat deze afname zich nog een aantal jaren op deze manier zou voortzetten.

4p **20** Bereken met de aantallen uit 2010 en 2016 hoeveel miljard brieven/kaarten er in 2020 volgens deze voorspelling bezorgd zouden worden. Geef je antwoord in één decimaal.

In de tabel zie je voor 2015 en 2016 onder andere het aantal bezorgde brieven/kaarten en de bijbehorende opbrengst. Dit is het totale bedrag dat aan postzegels is verkocht dat op al die brieven/kaarten is geplakt. De opbrengst in 2016 was lager dan die in 2015, ondanks de verhoging van de postzegelprijs van € 0,69 naar € 0,73.

**tabel**

| brieven/kaarten | | | |
|---|---|---|---|
| **jaar** | **aantal stuks (in miljoenen)** | **opbrengst (in miljoenen euro's)** | **postzegelprijs (cent)** |
| **2015** | 2401 | 1961 | 69 |
| **2016** | 2213 | 1877 | 73 |

Voor het versturen van brieven/kaarten tot 20 gram heb je 1 postzegel nodig. Voor het versturen van brieven/kaarten vanaf 20 gram tot 50 gram moet je 2 postzegels plakken, en vanaf 50 tot 100 gram 3 postzegels. Neem aan dat op alle brieven/kaarten maximaal 3 postzegels zijn geplakt.

2p **21** Leg met behulp van de tabel uit dat op een deel van de brieven/kaarten in 2015 meer dan 1 postzegel moet zijn geplakt.

Neem aan dat in 2016 op 88% van de brieven/kaarten 1 postzegel werd geplakt en op de overige brieven/kaarten 2 of 3 postzegels.
Je kunt dan met behulp van de tabel de volgende vergelijking opstellen om het aantal brieven/kaarten met 2 postzegels te berekenen:

$$0{,}73 \cdot 1947{,}44 + 1{,}46 \cdot x + 2{,}19 \cdot (265{,}56 - x) = 1877$$

Hierin is $x$ het aantal brieven/kaarten met 2 postzegels in miljoenen.

3p **22** Leg met berekeningen uit hoe je aan de getallen $1947{,}44$ en $1{,}46$ en $2{,}19$ en $265{,}56$ in deze vergelijking kunt komen.

3p **23** Bereken het percentage brieven/kaarten met 2 postzegels in 2016. Geef je antwoord in hele procenten.

**Let op: de laatste vraag van dit examen staat op de volgende pagina.**

## Fijnstofemissie

In het rapport Transport en Mobiliteit 2016 van het Centraal Bureau voor de Statistiek staat informatie over de fijnstofemissie (dit is de hoeveelheid fijnstof die vrijkomt) door het vervoer over de weg, uitgesplitst naar personenvervoer en goederenvervoer. Deze hoeveelheid wordt bepaald door het aantal gereden kilometers te vermenigvuldigen met de fijnstofemissie per gereden kilometer.

In 1990 was het aantal gereden kilometers door het personenvervoer 103 200 miljoen en door het goederenvervoer 16 800 miljoen. In 2014 is het aantal gereden kilometers voor het personenvervoer twee keer zo groot geworden als in 1990 en het aantal gereden kilometers voor het goederenvervoer drie keer zo groot. Ondanks de toename van het aantal gereden kilometers is de totale fijnstofemissie door het wegvervoer in 2014 aanzienlijk minder dan in 1990. Dit komt vooral door het gebruik van betere motoren.

Er moet worden onderzocht met hoeveel procent de totale emissie van fijnstof door het wegvervoer in de periode 1990 tot en met 2014 is gedaald. Daarvoor moeten bovenstaande gegevens over het aantal gereden kilometers en onderstaande aannames over de fijnstofemissie per gereden kilometer worden gebruikt.

In 1990 kwam er gemiddeld genomen bij het personenvervoer per gereden kilometer 0,08 gram fijnstof vrij. Voor het goederenvervoer was dit toen 0,58 gram. In de periode 1990 tot en met 2014 daalde de fijnstofemissie bij het personenvervoer elk jaar met 0,003 gram per gereden kilometer. In dezelfde periode daalde de fijnstofemissie per gereden kilometer bij het goederenvervoer met 9% per jaar.

6p **24** Onderzoek met behulp van bovenstaande gegevens en aannames met welk percentage de totale emissie van fijnstof door het wegvervoer in 2014 is gedaald ten opzichte van 1990. Geef je antwoord in hele procenten.

**Bronvermelding**

*Een opsomming van de in dit examen gebruikte bronnen, zoals teksten en afbeeldingen, is te vinden in het bij dit examen behorende correctievoorschrift, dat na afloop van het examen wordt gepubliceerd.*